МЕХАНИКА

УДК 517.977.2 DOI: 10.35803/1694-5298.2019.2.243-248

Б. Ы. Аширбаев, КГТУ им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика,
e-mail: ashirbaev-58@mail.ru
B. Y. Ashirbaev, KSTU n. a. I. Razzakov, Bishkek, Kyrgyz Republic.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С МАЛЫМ ШАГОМ

DECOMPOSITION OF LINEAR DISCRETE CONTROLLED SYSTEM WITH A SMALL STEP

Объектилери илим жана техниканын ар түрдүү областтарынан болгон оптималдык башкаруу маселелерин чыгарууда моделдердин өлчөмдөрүнүн чоң болушу жана бир катар убактылуу факторлордун болушу менен шартталган татаалдыктар пайда болот. Ошол себептен моделди бөлүштүрүү маселеси актуалдуу болуп эсептелинет.

Илимий макалада кичине кадам менен берилген сызыктуу дискреттик башкарылма системаны бөлүштүрүү ыкмасы сунуш кылынат. Кичине кадам менен берилген сызыктуу дискреттик башкарылма системаны толук бөлүштүрүүдөн алынган эквиваленттик система издедип жаткан системанын бардык касиеттерине ээ болот. Алынган системанын өлчөмү алгачкы системага салыштырганда бир кыйла төмөн, чыгарылышы бири биринен көз карандысыз табылат жана бири бир менен башкаруу функциясы менен гана байланышып турат. Сунуш кылынган ыкма асимптотикалык жана жакындаштырылган ыкмаларды айкалыштыруу менен ишке ашырылат.

Өзөк сөздөр: *дискреттештирүүчү кичине кадам, жөнөкөй структуранын матрицасы, айырмачыл оператор, инварианттык мейкиндиктин алдындагы мейкиндик.*

При решении задач оптимального управления объектами из различных областей науки и техники возникают сложности, обусловленные высокой размерностью моделей и наличием нескольких временных факторов. В связи с этим актуальной является задача декомпозиция моделей.

В статье предложен способ декомпозиции линейной дискретной управляемой системы с малым шагом. Эквивалентная система, полученная при полном разделении переменных состояний линейной дискретной управляемой системы с малым шагом, обладает всеми свойствами исходной системы. Она состоит из двух подсистем низкого порядка, решения которых находится независимо, причем они связаны только управляющей функцией. Предлагаемый подход сочетает в себе приемы асимптотических и приближенных методов анализа.

Ключевые слова: *малый шаг дискретизации, матрица простой структуры, разностный оператор, инвариантные подпространства.*

When solving problems of optimal control of objects from various fields of science and technology, difficulties arise due to the high dimensionality of models and the presence of several temporal factors. In this regard, the problem is the decomposition of models.

The paper proposes a method for decomposing a linear discrete controlled system with small steps. The equivalent system obtained with the complete separation of the state variables of a linear discrete controlled system with a small step has all the properties of the original system. It *consists of two subsystems of low order, whose solutions are found independently, and they are connected only by the control function. The proposed approach combines the methods of asymptotic and approximate methods of analysis.*

***Key words**: small discretization step, simple structure matrix, difference operator, invariant subspaces.*

Введение. Сложность решения задачи оптимального управления с дискретной управляемой системой зависит прежде всего от порядка уравнений и характера собственных функций. Иначе говоря, нужно каким-либо образом упростить систему так, чтобы разделенные подсистемы были связаны только с управляющими функциями.

Проблема разделения движений в управляемых системах рассматривались многими авторами, среди них можно отметить работы [1-3]. Исследования дискретных задач оптимального управления велись и в наших работах [4-6]. Данная работа является развитием исследований вышеупомянутых работ по данной проблеме.

Вывод формулы задачи. Рассмотрим задачу разделения уравнений динамики дискретной управляемой системы с малым шагом

$$y(t+\mu) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \tag{1}$$

где $y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, x(t), z(t) - n -$ мерные векторы переменных состояния,

$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}, A_i(t)\ (i = \overline{1,4}) - (n \times n), B_1(t), B_2(t) - (n \times r)$-матрицы, $u(t) - r -$мерный вектор управления,

$t \in T_\mu = \{t\colon\ t = k\mu,\ \ k = 0,\ 1, \cdots, M-1\} \subset T = \{t\colon 0 \le t \le 1\}, M = \frac{1}{\mu},$

$0 < \mu < 1 -$малый шаг дискретизации.

Начальные и конечные условия определяются соотношениями:

$$y(0) = y_0, \tag{2}$$

$$y(M) = y_M. \tag{3}$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

a) матрица $A(0)$ является матрицей простой структуры и она не имеет нулевого собственного значения;

b) все собственные значения $\lambda_i\ (i = \overline{1,n})$ матрицы $A(0)$ удовлетворяют условию $|\lambda_i| < q_0 < 1$.

При выполнении условии a и b в системе (1) введем замену переменных [2]:

$$z(t) = \tilde{z}(t) + H(t)x(t), \tag{4}$$

$$x(t) = \tilde{x}(t) - N(t)\tilde{z}(t), \tag{5}$$

где матрицы $H = H(t), N = N(t)$ размера $(n \times n)$ и будут определены через параметры системы (1). Тогда из (4) и (5) будем иметь соотношения:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Введем обозначение

$$D(t) = \begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix}, \tag{8}$$

тогда

$$D^{-1}(t) = \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Так как $y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}$, то соотношения (6) и (7) соответственно записываются в виде

$$y(t) = D(t) \cdot \tilde{y}(t),\ \tilde{y}(t) = D^{-1}(t) \cdot y(t). \tag{10}$$

Применив разностный оператор $\Delta_\mu y(t) = \frac{y(t+\mu)-y(t)}{\mu}$ и его свойства, к обеим частям первого соотношения (10) имеем [3]

$$\Delta_\mu y(t) = \left[\Delta_\mu D(t)\right] \cdot \tilde{y}(t) + D(t+\mu) \cdot \left[\Delta_\mu \tilde{y}(t)\right]. \tag{11}$$

С учетом (10), (11) система (1) записывается в виде

$$\mu\left[\Delta_\mu D(t)\right] \cdot \tilde{y}(t) + \mu D(t+\mu) \cdot \left[\Delta_\mu \tilde{y}(t)\right] = (A(t) - E_{2n})D(t)\tilde{y}(t) + B(t)u(t)$$

или

$$\tilde{y}(t+\mu) = D^{-1}(t+\mu)A(t)D(t)\tilde{y}(t) + D^{-1}(t+\mu)B(t)u(t). \tag{12}$$

Пусть матрицы $H(t)$ и $N(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$H(t+\mu)\tilde{A}_1(t) - A_4(t)H(t) - A_3(t) = 0, \tag{13}$$

$$-\tilde{A}_1(t)N(t) + N(t+\mu)\tilde{A}_4(t) + A_2(t) = 0, \tag{14}$$

где

$$\tilde{A}_1(t) = A_1(t) + A_2(t)H(t),\ \tilde{A}_4(t) = A_4(t) - H(t+\mu)A_2(t), \tag{15}$$

тогда уравнение (12) записывается в форме

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t+\mu) \\ \tilde{z}(t+\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1(t) & 0 \\ 0 & \tilde{A}_4(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1(t) \\ \tilde{B}_2(t) \end{pmatrix} u(t), \tag{16}$$

здесь

$$\tilde{B}_1(t) = B_1(t) + N(t+\mu)\tilde{B}_2(t),\ \tilde{B}_2(t) = B_2 - H(t+\mu)B_1(t). \tag{17}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* a, b *и матрицы* $H(t)$, $N(t)$ *являются решениями уравнений (13) и (14), тогда систему (1) можно разделить на две подсистемы низкого порядка:*

$$\tilde{x}(t+\mu) = \tilde{A}_1(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1(t)u(t), \tag{18}$$

$$\tilde{z}(t+\mu) = \tilde{A}_4(t)\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2(t)u(t). \tag{19}$$

Граничные условия уравнений (18) и (19) определяются соотношениями:

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0,\ \tilde{x}(M) = \tilde{x}_M,\ \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0,\ \tilde{z}(M) = \tilde{z}_M, \tag{20}$$

$$\tilde{x}_0 = x_0 + N(0)\tilde{z}_0,\ \ \tilde{x}_M = x_M + N(M\mu)\tilde{z}_M,$$

$$\tilde{z}_0 = z_0 - H(0)x_0,\ \ \tilde{z}_M = z_M - H(M\mu)x_M.$$

Системы (18) и (19) независимы друг от друга и связаны только по управляющей функции $u(t)$.

Приближенные решения уравнений (13) и (14). Как отмечено в теореме 1, система (1) разделяема тогда и только тогда, когда существуют решения уравнений (13 и (14).

Построим приближенные решения уравнений (13) и (14).

Рассмотрим уравнение (13). При $k = \mu = 0$ из этого уравнения получаем

$$A_4(0)H(0) - H(0)A_1(0) - H(0)A_2(0)H(0) + A_3(0) = 0. \tag{21}$$

Пусть матрица

$$A(0) = \begin{pmatrix} A_1(0) & A_2(0) \\ A_3(0) & A_4(0) \end{pmatrix} \tag{22}$$

имеет инвариантные подпространства G_n всех размерностей n. Тогда в подпространстве G_n, имеющее базисную матрицу $V(0)$, найдется такая квадратная матрица $A_G(0)$ размера $n \times n$, что выполнится равенство [7]

$$A(0)V(0) = V(0)A_G(0). \tag{23}$$

Представим базисную матрицу $V(0)$ в виде

$$V(0) = \begin{pmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $V_1(0) -$ матрица размера $n \times n$.

Теорема. 2. *Пусть* $|V_1(0)| \neq 0$. Справедливы следующие утверждения:

c) матрица

$$\mathrm{H}(0)=\mathrm{V}_2(0)\cdot \mathrm{V}_1^{-1}(0) \tag{25}$$

является решением матричного уравнения (21);

d) подпространство $\mathrm{G_n}$ с базисной матрицей

$$\mathrm{V}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{E_n}\\ \mathrm{H}(0)\end{pmatrix} \tag{26}$$

является инвариантным подпространством матрицы А. Для этой базисной матрицы и для решения уравнения (21) справедлива формула (25).

Доказательство. Докажем пункт c теоремы 2. Подставляя матрицы $A(0)$, $V(0)$ в уравнение (23) получим

$$A_1(0)V_1(0)+A_2(0)V_2(0)=V_1(0)A_G(0), \tag{27}$$

$$A_3(0)V_1(0)+A_4(0)V_2(0)=V_2(0)A_G(0). \tag{28}$$

Умножая каждое из уравнения (27) и (28) справа на V_1^{-1}, с учетом (25) имеем:

$$A_1(0)+A_2(0)H(0)=V_1(0)A_G(0)V_1^{-1}(0), \tag{29}$$

$$A_3(0)+A_4(0)H(0)=V_2(0)A_G(0)V_1^{-1}(0). \tag{30}$$

Теперь равенство (28) умножая слева на $H(0)$ и вычитая полученный результат из (30) получаем уравнение (21).

Докажем пункт d теоремы 2. Считая, что решение $H(0)$ известным, введем обозначение

$$A_3(0)+A_4(0)H(0)=\mathrm{S}(0). \tag{31}$$

Подставляя (31) в (21) имеем

$$H(0)\big(A_1(0)+A_2(0)H(0)\big)=\mathrm{S}(0), \tag{32}$$

тогда с учетом (14) и (31) из (32) получаем:

$$A_1(0)+A_2(0)H(0)=\tilde{A}_1(0), \tag{33}$$

$$A_3(0)+A_4(0)H(0)=H(0)\tilde{A}_1(0). \tag{34}$$

Теперь, равенства (33) и (34) записываем так

$$\begin{pmatrix}A_1(0) & A_2(0)\\ A_3(0) & A_4(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n\\ H(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n\\ H(0)\end{pmatrix}\tilde{A}_1(0)$$

или

$$A(0)\begin{pmatrix}E_n\\ H(0)\end{pmatrix}=\big(H(0)\big)\tilde{A}_1(0). \tag{35}$$

Из (35) в соответствии с (23) следует, что подпространство G_n с базисной матрицей (24) является инвариантным подпространством матрицы $A(0)$. Справедливы следующие следствия из теоремы 2:

Следствие 1. Каждое решение уравнения (21) определяет некоторое $n-$мерное инвариантное подпространство матрицы $\mathrm{A}(0)$.

Следствие 2. Между решениями уравнения (21) и $n-$мерными инвариантными подпространствами матрицы $A(0)$ такими, что в любой их базисной матрице верхний блок матрицы размера $n\times n$ не вырожден, установлено соответствие. Специальный выбор базисной матрицы в виде (26) показывает, что это соответствие взаимно однозначно, т.е. различным решениям отвечают различные инвариантные подпространства и обратно.

Следствие 3. Выбор базисной матрицы $V(0)$ подпространства G_n для поиска решения по формуле (25) произволен. В частности, для любой диагонализируемой матрицы $A(0)$ в качестве базиса может быть взята любая система из n ее собственных векторов.

Теперь построим приближенные решения уравнения (14). Известно из [8], что для любой невырожденной матрицы A, не имеющей чисто мнимых корней, последовательность, определяемое условием

$$X_{p+1}=\tfrac{1}{2}\big(X_p+X_p^{-1}\big),\ p=0,1,2,\cdots,\quad X_0=A,$$

сходится, причем квадратичной скоростью и если A устойчивая матрица, то

$$\lim_{p\to\infty}X_p=E.$$

Предположим, что выполняется условие

i) при $k=\mu=0$ матрицы $\tilde{A}_1(0)=A_1(0)+A_2(0)H(0)$ и $\tilde{A}_4(0)=A_4(0)-H(0)A_2(0)-$ устойчивые.

При выполнении условия i умножаем уравнение (14) слева и справа на $\tilde{A}_1^{-1}(0)$ и $\tilde{A}_4^{-1}(0)$

$$N(0)\tilde{A}_4^{-1}(0)-\tilde{A}_1^{-1}(0)N(0)=\tilde{A}_1^{-1}(0)A_2(0)\,\tilde{A}_4^{-1}(0)$$

и полученное уравнение перепишем в виде

$$N(0)\frac{1}{2}(\,\tilde{A}_4(0)+\tilde{A}_4^{-1}(0))-\frac{1}{2}\left(\tilde{A}_1(0)+\tilde{A}_1^{-1}(0)\right)N(0)= \qquad (36)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\tilde{A}_1^{-1}(0)A_2(0)\,\tilde{A}_4^{-1}(0)-A_2(0)\right).$$

Исходя из условия: $\tilde{A}_{10}(0)=\tilde{A}_1(0)$, $\tilde{A}_{40}(0)=\tilde{A}_4(0)$, $A_{20}(0)=A_2(0)$ строим последовательности матриц:

$$\tilde{A}_{1p+1}(0)=\frac{1}{2}\left(\tilde{A}_{1p}(0)+\tilde{A}_{1p}^{-1}(0)\right),\quad p=0,1,2,\cdots \qquad (37)$$
$$\tilde{A}_{4p+1}(0)=\frac{1}{2}\left(\tilde{A}_{4p}(0)+\tilde{A}_{4p}^{-1}(0)\right),$$
$$A_{2p+1}(0)=\frac{1}{2}\left(\tilde{A}_{1p}^{-1}(0)A_{2p}(0)\,\tilde{A}_{4p}^{-1}(0)-A_{2p}(0)\right).$$

С учетом (36) и (37) имеем следующие уравнения, эквивалентные к уравнению (14)

$$\tilde{A}_{1p+1}(0)N(0)-N(0)\tilde{A}_{4p+1}(0)=A_{2p+1}(0). \qquad (38)$$

Поскольку матрицы $\tilde{A}_1(0)$ и $\tilde{A}_4(0)$ устойчивые, то

$$\lim_{p\to\infty}\tilde{A}_{1p}(0)=E_n,\quad \lim_{p\to\infty}\tilde{A}_{4p}=-E_n$$

и левая часть уравнения (38) имеет предел при $p\to\infty$, поэтому

$$N(0)=\frac{1}{2}A_{2p}(0). \qquad (39)$$

Так как $H(0)$ и $N(0)$ известны, при $k=0,\ 1,\cdots,M-1$, $\mu\neq 0$ из уравнения (13) и (14) находим:

$$H(\mu)=\left(A_4(0)H(0)+A_3(0)\right)\tilde{A}_1^{-1}(0), \qquad (40)$$
$$H(2\mu)=\left(A_4(\mu)H(\mu)+A_3(\mu)\right)\tilde{A}_1^{-1}(\mu),\cdots,$$
$$H((M-1)\mu)=\left(A_4((M-2)\mu)H((M-2)\mu)+A_3((M-2)\mu)\right)\times$$
$$\times\tilde{A}_1^{-1}((M-2)\mu),$$

где $\tilde{A}_1(k\mu)=A_1(k\mu)+A_2(k\mu)H(k\mu)$.

$$N(\mu)=\left(\tilde{A}_1(0)N(0)-A_2(0)\right)\tilde{A}_4^{-1}(0), \qquad (41)$$
$$N(2\mu)=\left(\tilde{A}_1(\mu)N(\mu)-A_2(\mu)\right)\tilde{A}_4^{-1}(\mu),\cdots,$$
$$N((M-1)\mu)=\left(\tilde{A}_1((M-2)\mu)N((M-2)\mu)-A_2((M-2)\mu)\right)\times$$
$$\times\tilde{A}_4^{-1}((M-2)\mu),$$

где $\tilde{A}_4(k\mu)=A_4(k\mu)-H\left((k+1)\mu\right)A_2(k\mu)$.

При известном $u(k\mu)$ решение задачи (18) - (20) представим в виде

$$\tilde{y}(k\mu)=\left(G(k\mu,0)\right)^k\tilde{y}_0+\sum_{i=0}^{k-1}\left(G(i\mu,0)\right)^{k-i-1}\tilde{B}(i\mu)u(k\mu), \qquad (42)$$

где $\tilde{y}(t)=D^{-1}(t+\mu)y(t)=\begin{pmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{z}(t)\end{pmatrix}$, $\tilde{B}(t)=D^{-1}(t+\mu)B(t)$, $G(t,0)=\begin{pmatrix}\Phi(t,0) & 0\\ 0 & \Psi(t,0)\end{pmatrix}$,

$\Phi(t,0)$, $\Psi(t,0)$ $-$переходные матрицы систем, соответственно

$$\tilde{x}(t+\mu)=\tilde{A}_1(t)\tilde{x}(t),\quad \tilde{x}(0)=\tilde{x}_0, \qquad (43)$$
$$\tilde{z}(t+\mu)=\tilde{A}_4(t)\tilde{z}(t),\quad \tilde{z}(0)=\tilde{z}_0. \qquad (44)$$

Заключение. Предложенный способ декомпозиции линейной дискретной управляемой системы с малым шагом в дальнейшем будут использованы при исследовании управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости дискретных систем с малым шагом, и при построении алгоритмов решений дискретных задач оптимального управления с малым шагом.

Список литературы

1. Геращенко Е. И. Метод разделение движений и оптимизация нелинейных систем [Текст] / Е.И. Геращенко, С.М. Геращенко. - М: Наука, 1975. - 296 с.

2. Стрыгин В. В. Разделение движений методом интегральных многообразий [Текст] / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. - М: Наука, 1988. - 256 с.

3. Портер У. Современные основания общей теории систем [Текст] / У Портер. - М: Наука, 1971. - 556 с.

4. Иманалиев З.К. Исследования задачи управления экономики на основе дискретной модели оптимального управления [Текст] / З.К. Иманалиев, Б.Ы. Аширбаев, Ж.А. Алымбаева // Вестник КГУСТА. – Бишкек, 2013. - №4(42). - С. 232 -237.

5. Иманалиев З.К. Управление с минимальной энергией в дискретной задаче оптимального управления с малым шагом [Текст] / З.К. Иманалиев, Б.Ы. Аширбаев, А.М. Осмонканов // Вестник КГУСТА. - Бишкек, 2014. - №2 (44). - С. 138 -141.

6. Аширбаев Б.Ы. Дискретная задача оптимального управления при ограниченной энергии [Текст] / Б.Ы. Аширбаев, А.М. Осмонканов, Абдрасул кызы Чолпонай // Вестник КГУСТА. - Бишкек, 2015. - №4 (50). - С. 183 -187.

7. Б. Куо. Теория и проектирование цифровых систем управления [Текст] /Б. Куо. - М: Машиностроение, 1986. - 448 с.

8. Beavers A. N., Denman E.D. A new solution method for the Lyapunov matrixs eguation. [Text] /A. N. Beavers, E. D. Denman. – SIAM J. Appl. Math., 1975. - P. 416 – 421.